令和五年

(1) $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = \cos x$ の k 階導関数を $f^{(k)}(x)$ で表す．ただし，$\mathbb{R}$ は実数全体の集合である．以下の各問いに答えよ．

(a) 全ての $k \geq 1$ について $f^{(k)}(0)$ を求めよ．

(b) $f(x)$ の原点周りでのテイラー級数を

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

とするとき，全ての $k \geq 0$ に関する a_k を求めよ．

(c) 全ての $x \in \mathbb{R}$ について

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$$

が収束することを示せ．

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ．なお，y' は関数 $y(x)$ の x に関する1階導関数を表している．

$y'''' - 2y''' - y'' - 4y' + 12y = 0$

(3) 閉曲線 C に沿った複素積分 $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z(z^2-1)} dz$ を求めよ．ただし，C は円 $|z| = r$, $r > 0$ かつ $r \neq 1$ とする．

解答

（１）

(a)

$$f^k(0) = \begin{cases} 1, & k \equiv 0 \pmod 4 \\ 0, & k \equiv 1 \,\mathrm{or}\, 3 \pmod 4 \\ -1, & k \equiv 2 \pmod 4 \end{cases} \tag{1}$$

(b)

$$a_k = \frac{f^k(0)}{k!} = \begin{cases} \frac{1}{k!}, & k \equiv 0 \pmod 4 \\ 0, & k \equiv 1 \,\mathrm{or}\, 3 \pmod 4 \\ \frac{-1}{k!}, & k \equiv 2 \pmod 4 \end{cases} \tag{2}$$

(c)

$$\begin{gathered} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k| = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

(２)

$$\begin{gathered} r^4 - 2r^3 - r^2 - 4r + 12 = 0 \\ (r-2)^2(r^2+2r+3) = 0 \\ r_1 = 2, r_2 = 2, r_3 = -1 + \sqrt{2}i, r_4 = -1 - \sqrt{2}i \\ y = e^{2x}(c_1 + c_2 x) + e^{-x}(c_3 \cos\sqrt{2}x + c_4 \sin\sqrt{2}x) \end{gathered} \tag{4}$$

(３)

$$\begin{gathered} f(z) = \frac{1}{z(z^2-1)} \text{とおくと}, \\ \\ 0 < r < 1 \text{のとき}, z = 0 \text{は1位の極である。} \\ \mathrm{res} f(0) = \lim_{z\to 0} z \frac{1}{z(z^2-1)} = \left.\frac{1}{z^2-1}\right|_{z=0} = -1 \\ \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \,\mathrm{res} f(0) = -2\pi i \\ \\ r > 1 \text{のとき}, z = 0, z = \pm 1 \text{は1位の極である。} \\ \mathrm{res} f(-1) = \lim_{z\to -1} (z+1) \frac{1}{z(z^2-1)} = \left.\frac{1}{z(z-1)}\right|_{z=-1} = \frac{1}{2} \\ \mathrm{res} f(1) = \lim_{z\to 1} (z-1) \frac{1}{z(z^2-1)} = \left.\frac{1}{z(z+1)}\right|_{z=1} = \frac{1}{2} \\ \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \left[\mathrm{res} f(0) + \mathrm{res} f(-1) + \mathrm{res} f(1)\right] = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

令和四年

(1) $\mathbb{R}^m$ 上で微分可能な実数値関数 $f(x)$ $(x = (x_1, x_2, ..., x_m))$ について，$x_i = v_i(t)$ $(i = 1, 2, ..., m)$ とおく．ただし，各 v_i は $\mathbb{R}$ 上で微分可能な関数とする．次の各問いに答えよ．

(a) $\dfrac{df}{dt}$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ と $\dfrac{dv_i}{dt}$ $(i = 1, 2, ..., m)$ で表せ．

(b) $m = 2$，$f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2$，$v_1(t) = \sin t$，$v_2(t) = e^t$ のとき，$\dfrac{df}{dt}$ を求めよ．

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2xy = e^{x^2}$$

(3) 閉曲線 C に沿った複素積分 $\displaystyle\oint_C \frac{\cos z}{(2z-\pi)^3}dz$ を求めよ．ただし，C は円 $|z| = 2$ とする．

解答

（1）

(a)

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

(b)

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = (2x_1 + x_2)\cos t + (x_1 + 4x_2)e^t \tag{7}$$

（2）

$$\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2xy = 0 \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2x\mathrm{d}x \\
y = Ae^{x^2} \\
y = A(x)e^{x^2} \text{を与えられた微分方程式に代入すると,} \\
\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x} = 1 \\
A(x) = x + C \\
y = (x + C)e^{x^2}
\end{gathered} \tag{8}$$

（3）

$$\begin{gathered}
f(z) = \frac{\cos z}{(2z-\pi)^3} \text{とおくと}, z = \frac{\pi}{2} \text{は3位の極である。} \\
\mathrm{res} f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(z - \frac{\pi}{2})^3 \frac{\cos z}{(2z-\pi)^3} = -\frac{\cos z}{16}\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 0 \\
\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,\mathrm{res} f(\frac{\pi}{2}) = 0
\end{gathered} \tag{9}$$

令和三年

$\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = (x+y)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

について次の各問いに答えよ.

(1) f の停留点を全て求めよ.

(2) f の極大点と極小点を全て求めよ.

(3) f の最大値または最小値が存在する場合，それらを求めよ.

解答

（1）

$$\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial x} = (1 - x(x+y))e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = (1 - y(x+y))e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ (x,y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\,\mathrm{or}\,(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})\end{gathered} \tag{10}$$

（2）

$$\begin{gathered}A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (x^3 + x^2 y - 3x - y)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (x^2 y + xy^2 - x - y)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (y^3 + xy^2 - 3y - x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\ (x,y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\text{のとき,} \\ A = -\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} < 0 \quad B = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} \quad C = -\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} \\ D = AC - B^2 = 4e^{-1} > 0 \Rightarrow (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\text{は極大点です。} \\ (x,y) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})\text{のとき,} \\ A = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} > 0 \quad B = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} \quad C = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} \\ D = AC - B^2 = 4e^{-1} > 0 \Rightarrow (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})\text{は極小点です。}\end{gathered} \tag{11}$$

（3）

$$\begin{aligned}
&\text{最大値：} f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \\
&\text{最小値：} f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{12}$$

次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x^2 + 6y^2}{4xy}$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{2x+y+1} - 1$

解答

（1）

$$\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{4y} + \frac{3y}{2x} \\
y = ux\text{とすると}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x + u \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x + u = \frac{1}{4u} + \frac{3u}{2} \\
\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2u^2+1}\mathrm{d}(2u^2) \\
\ln|x| + C_1 = \ln|1 + 2u^2| \\
1 + 2u^2 = e^{C_1}x \\
u = \pm\frac{\sqrt{2(Cx-1)}}{2} \quad (C = e^{C_1}) \\
y = ux = \pm\frac{\sqrt{2(Cx-1)}}{2}x \quad (C = e^{C_1})
\end{gathered} \tag{13}$$

（2）

$$\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^y(e^{2x+1} - e^{-y}) \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}e^{-y} = e^{2x+1} - e^{-y} \\
t = e^{-y} > 0\text{とすると}, \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}e^{-y} \\
\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = t - e^{2x+1} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} - t = -e^{2x+1} \\
P(x) = -1 \quad Q(x) = -e^{2x+1} \\
t = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C) = e^x(-e^{x+1} + C) \\
e^{-y} = e^x(-e^{x+1} + C) \\
y = -\ln(e^x(-e^{x+1} + C))
\end{gathered} \tag{14}$$

次の各問に答えよ．

(1) 複素関数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)^2}$ を $z=0$ でローラン展開せよ．

(2) 複素関数 $g(z)=z\sin\dfrac{1}{z+2}$ を $z=-2$ でローラン展開し，級数が収束する領域を示せ．
次に，$z=-2$ における留数を求めよ．

解答

（1）

$$\begin{gathered}
0<|z|<2\text{のとき}\\
f(z)=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{2-z}\right)'=\frac{1}{2z}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right)'=\frac{1}{2z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right)'\\
=\frac{1}{2z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}n\left(\frac{z}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{4z}\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\left(\frac{z}{2}\right)^m\\
|z|>2\text{のとき}\\
f(z)=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{2-z}\right)'=-\frac{1}{2z}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right)'=-\frac{1}{2z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n\right)'\\
=-\frac{1}{2z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{z^2}n\left(\frac{2}{z}\right)^{n-1}=\frac{1}{z^3}\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\left(\frac{2}{z}\right)^m
\end{gathered}\tag{15}$$

（2）

$$\begin{gathered}
z+2=u\text{とすれば},z=u-2\text{より},\\
g(z)=(u-2)\sin\frac{1}{u}\\
=(u-2)\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{3!u^3}+\frac{1}{5!u^5}-\cdots\right)\\
=1-\frac{2}{u}-\frac{1}{3!u^2}+\frac{2}{3!u^3}+\frac{1}{5!u^4}-\cdots\\
=1-\frac{2}{z+2}-\frac{1}{3!(z+2)^2}+\frac{2}{3!(z+2)^3}+\frac{1}{5!(z+2)^4}-\cdots\\
z=-2\text{における留数は}-2\\
\text{この級数の収束領域は},\text{複素平面全体から点}z=-2\text{を除いた領域である。}
\end{gathered}\tag{16}$$

令和二年

関数 $y(x)$ の微分方程式

$$(x^4-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2+2x^3y-3x^2$$

について以下の問いに答えよ．

(1) 与えられた微分方程式は，$y_p(x)=ax^3$ の形の特殊解を持つ．$y_p(x)$ を求めよ．ただし a は定数とする．

(2) 特殊解 $y_p(x)$ と関数 $u(x)$ を用いて $y=y_p+\dfrac{1}{u}$ とおき，一般解を求めよ．

解答

（1）

$$(x^4-1)3ax^2=a^2x^6+2x^3ax^3-3x^2 \Rightarrow a=1 \Rightarrow y_p(x)=x^3 \tag{17}$$

（2）

$$\begin{gathered}
y=x^3+\frac{1}{u}\\
(x^4-1)u'+4x^3u=-1\\
(x^4-1)\neq 0\text{のとき},u'+\frac{4x^3}{x^4-1}u=\frac{1}{1-x^4}\\
P(x)=\frac{4x^3}{x^4-1}\quad Q(x)=\frac{1}{1-x^4}\\
u=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)=\frac{C-x}{x^4-1}\\
y=x^3+\frac{x^4-1}{C-x}\\
(x^4-1)=0\text{のとき},\text{上式より},y=x^3=y_p,\text{微分方程式も満たす}
\end{gathered} \tag{18}$$

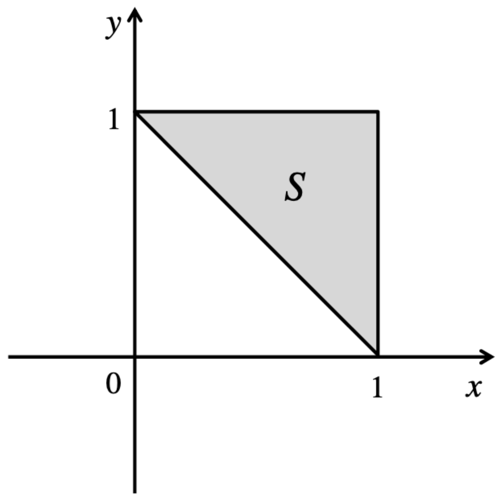
$$\therefore y=x^3+\frac{x^4-1}{C-x}$$

図に示す z 平面における $x=1, y=1, y=1-x$ で囲まれた三角領域 S を考える．以下の変換で S が写像される w 平面の領域 S' を図示すると共に、S' を囲む境界の方程式を示せ．ただし，$z=x+iy$，$w=u+iv$ は複素数，x,y,u,v は実数，$i=\sqrt{-1}$ である．

(1) $w=z+(1-\sqrt{3}i)$

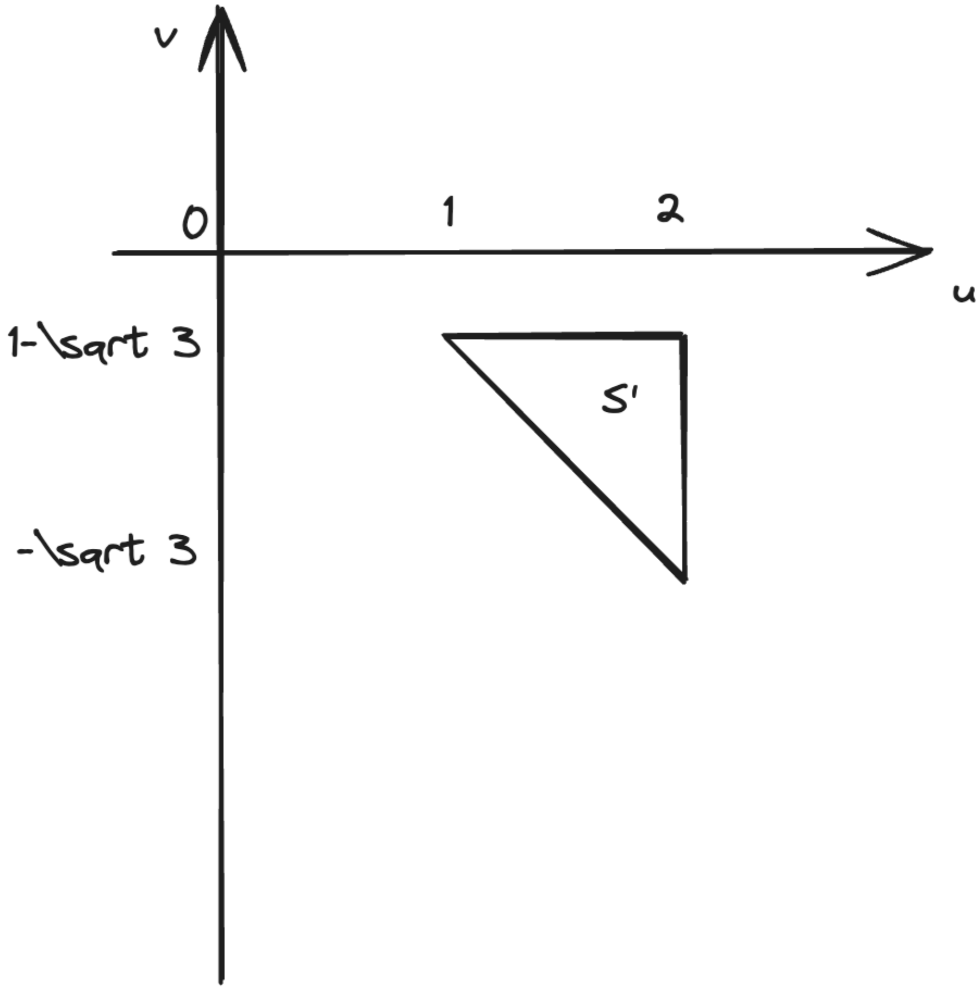
(2) $w=2e^{\frac{\pi i}{6}}z+(1-\sqrt{3}i)$

(3) $w=z^2$



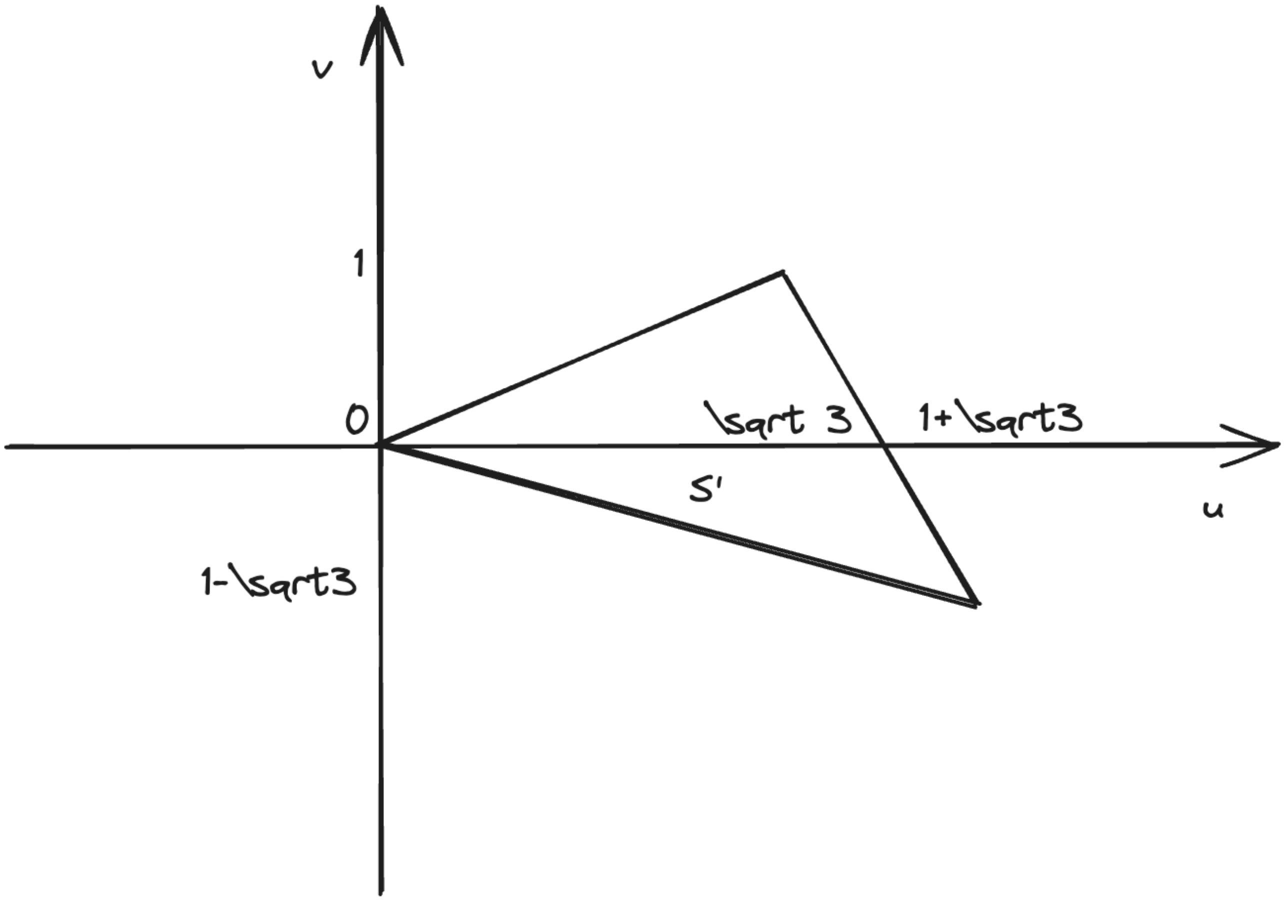
解答

（1）



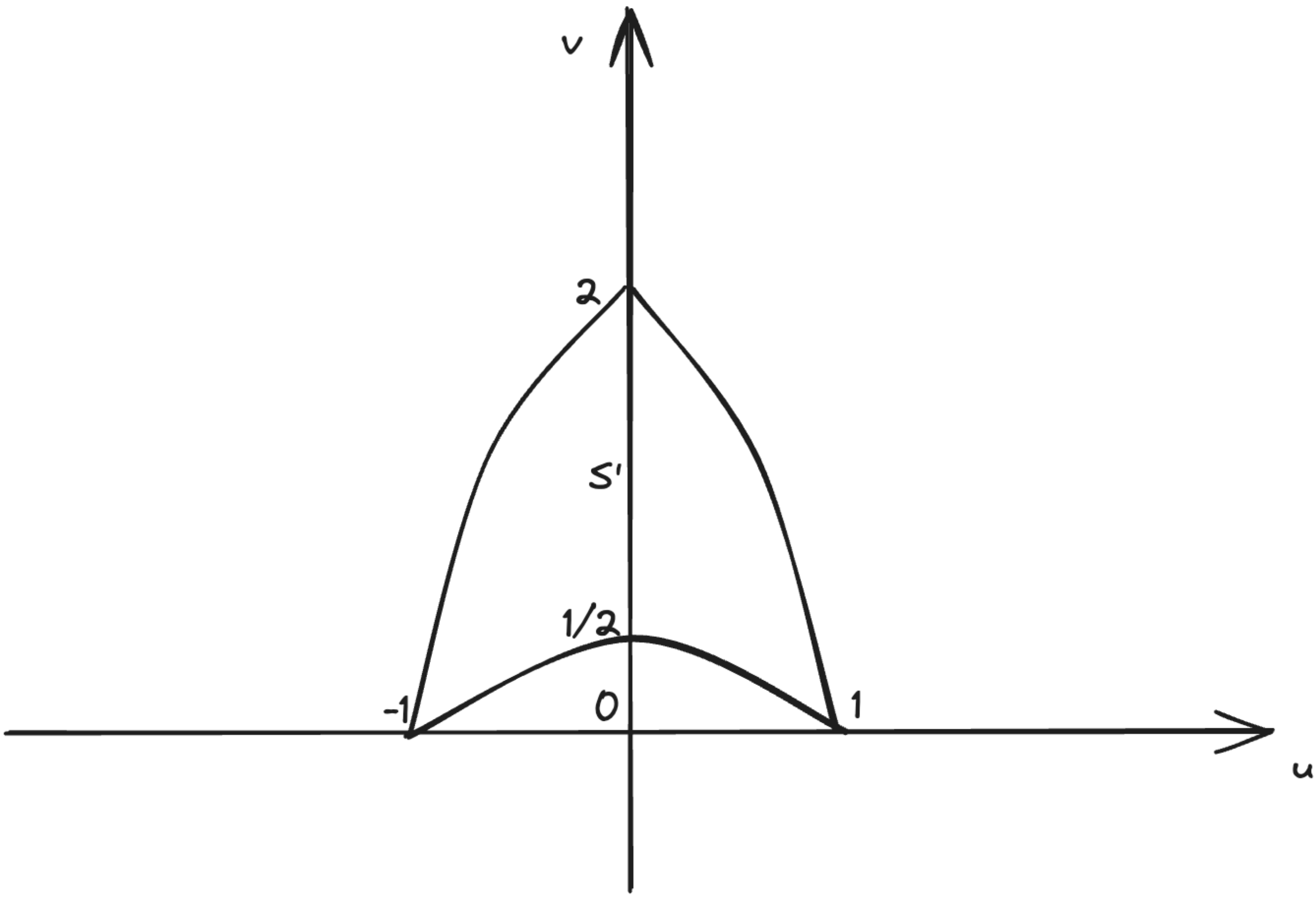
$$\begin{gathered}\omega = z + (1-\sqrt{3}i) = (1+x) + (y-\sqrt{3})i \\ u = 1+x \quad v = y-\sqrt{3} \\ (i)x=1, y=t\,(0\le t\le 1)\text{とおくと}, u=2, v=t-\sqrt{3} \\ u=2\,(-\sqrt{3}\le v\le 1-\sqrt{3}) \\ (ii)x=t\,(0\le t\le 1), y=1\text{とおくと}, u=1+t, v=1-\sqrt{3} \\ v=1-\sqrt{3}\,(1\le u\le 2) \\ (iii)x=t\,(0\le t\le 1), y=1-t\text{とおくと}, u=1+t, v=1-t-\sqrt{3} \\ v=-u+2-\sqrt{3}\,(1\le u\le 2)\end{gathered} \tag{19}$$

（2）



$$
\begin{gathered}
\omega = 2e^{\frac{\pi i}{6}}z + (1-\sqrt{3}i) = (\sqrt{3}+i)(x+iy) + (1-\sqrt{3}i) = (\sqrt{3}x - y + 1) + (\sqrt{3}y + x - \sqrt{3})i \\
u = \sqrt{3}x - y + 1 \quad v = \sqrt{3}y + x - \sqrt{3} \\
(i)x = 1, y = t\,(0 \le t \le 1)\text{とおくと}, u = \sqrt{3} + 1 - t, v = \sqrt{3}t + 1 - \sqrt{3} \\
v = 4 - \sqrt{3}u\,(\sqrt{3} \le u \le 1 + \sqrt{3}) \\
(ii)x = t\,(0 \le t \le 1), y = 1\text{とおくと}, u = \sqrt{3}t, v = t \\
u = \sqrt{3}v\,(0 \le v \le 1) \\
(iii)x = t\,(0 \le t \le 1), y = 1 - t\text{とおくと}, u = (1+\sqrt{3})t, v = (1-\sqrt{3})t \\
v = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}u\,(0 \le u \le 1 + \sqrt{3})
\end{gathered} \tag{20}
$$

（3）



$$\omega = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 - i \cdot 2xy$$
$$u = x^2 - y^2 \quad v = 2xy$$
$$(i) x = 1, y = t\,(0 \leq t \leq 1)\text{とおくと}, u = 1 - t^2, v = 2t$$
$$u = 1 - \frac{v^2}{4}\,(0 \leq v \leq 2)$$
$$(ii) x = t\,(0 \leq t \leq 1), y = 1\text{とおくと}, u = t^2 - 1, v = 2t \tag{21}$$
$$u = \frac{v^2}{4} - 1\,(0 \leq v \leq 2)$$
$$(iii) x = t\,(0 \leq t \leq 1), y = 1 - t\text{とおくと}, u = 2t - 1, v = 2t - 2t^2$$
$$v = \frac{1}{2} - \frac{u^2}{2}\,(-1 \leq u \leq 1)$$

令和元年

２つの関数 $x(t), y(t)$ について，次の連立微分方程式を解け．

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - 5y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - 3y \\ x(0) = 3, \quad y(0) = 1 \end{cases}$$

解答

$$
\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - 5y \Rightarrow y = \frac{1}{5}\left(x - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - 3y \text{に代入して,} \\
\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2x = 0 \\
\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm i \\
x = e^{-t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) \\
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -e^{-t}[(c_1 - c_2)\cos t + (c_1 + c_2)\sin t] \\
y = \frac{1}{5}e^{-t}[(2c_1 - c_2)\cos t + (c_1 + 2c_2)\sin t] \\
\begin{cases} x(0) = c_1 = 3 \\ y(0) = \frac{1}{5}(2c_1 - c_2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = 1 \end{cases} \\
\begin{cases} x = e^{-t}(3\cos t + \sin t) \\ y = e^{-t}(\cos t + \sin t) \end{cases}
\end{gathered} \tag{22}
$$

解析関数 $f(z) = u + iv$ を考える．ただし，$z = x + iy$ は複素数，x と y は実数，u と v は実数値関数，$i = \sqrt{-1}$ である．x と y が極形式 $x = r\cos\theta$ と $y = r\sin\theta$ で表されるとき，極形式のコーシー・リーマンの方程式は以下の式で書けることを示せ．

$$
\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}
$$

解答

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y} \\
\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y} \\
\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial v}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial v}{\partial y} \\
\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial v}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial v}{\partial y} \\
\\
\text{コーシー・リーマンの方程式} \\
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\
\\
\frac{\partial u}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial v}{\partial y} - \sin\theta\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\
\frac{\partial v}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial v}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial v}{\partial y} = -\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}
\end{gathered} \tag{23}
$$