令和五年

直交座標系において，x，y，z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とする．次の各問に答えよ．

(1) C を $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ で定義される円とする．次に示す C_1 および C_2 に沿った線積分 $\int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ および $\int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

(a) C_1: C 上を点 $\mathrm{A}(1, \sqrt{3}, 0)$ から 点 $\mathrm{B}(-\sqrt{3}, 1, 0)$ まで反時計回りに向かう曲線

(b) C_2: C 上を点 $\mathrm{A}(1, \sqrt{3}, 0)$ から 点 $\mathrm{B}(-\sqrt{3}, 1, 0)$ まで時計回りに向かう曲線

(2) S を半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $(0 \leq z)$ と平面 $z = 0$ で囲まれた領域の境界とする．面積分 $\int_S \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$ を求めよ．外向き法線ベクトルを用いよ．

解答

（1）

(a)

$$
\begin{gathered}
x(t) = 2\cos t \\
y(t) = 2\sin t \\
\boldsymbol{r} = 2\cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sin t\,\boldsymbol{j} \quad (\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{5\pi}{6}) \\
d\boldsymbol{r} = \langle -2\sin t, 2\cos t, 0 \rangle dt \\
\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \langle 2\sin t, -2\cos t, z \rangle \cdot \langle -2\sin t, 2\cos t, 0 \rangle dt = -4(\sin^2 t + \cos^2 t)dt = -4dt \\
\int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -4 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} dt = -2\pi
\end{gathered} \tag{1}
$$

(b)

$$
\int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{-C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 2\pi \tag{2}
$$

（2）

Cを$x^2+y^2=4, z=0$で定義される円とする。

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & z \end{vmatrix} = \langle 0,0,-2 \rangle$$

$$\int_{S_1} \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -4\int_0^{2\pi} dt = -8\pi$$

$$\int_{S_2} \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{S_2} \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS \tag{3}$$

$$= \int_{S_2} \langle 0,0,-2 \rangle \cdot \langle 0,0,-1 \rangle dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 2rdr = 8\pi$$

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{S_1} \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} + \int_{S_2} \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

令和四年

直交座標系において，x，y，z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 10z\boldsymbol{k}$ とする．次の面 S_1，S_2 及び S_3 に対する面積分を計算せよ．

(1) S_1 を円筒面 $x^2+z^2=1$ $(0 \le y \le 4)$ とする (上面と底面の無い円筒の表面)．円筒外向き法線ベクトルを用いよ．

(2) S_2 を円筒面の一部 $x^2+z^2=1$ $(0 \le y \le 4,\ 0 \le z)$ と長方形面 $z=0$ $(-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 4)$ からなる半円筒面とする (上面と底面の無い半円筒の表面)．半円筒外向き法線ベクトルを用いよ．

(3) S_3 を円筒面 $x^2+z^2=1$ と，平面 $z=0$，$y=0$，$x+y=4$ で囲まれた領域の境界とする．外向き法線ベクトルを用いよ．

解答

（1）

$$
\begin{aligned}
& 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le y \le 4 \\
& \boldsymbol{F} = \langle \cos\theta, 2y, 10\sin\theta \rangle \\
& \boldsymbol{n} = \langle \cos\theta, 0, \sin\theta \rangle \\
& \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} = \cos^2\theta + 10\sin^2\theta = \frac{11}{2} - \frac{9}{2}\cos 2\theta \\
& \int_{S_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S_1} = \int_{S_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS_1 \\
& \qquad = \int_0^4 \int_0^{2\pi} (\frac{11}{2} - \frac{9}{2}\cos 2\theta) d\theta dy \\
& \qquad = 4\int_0^{2\pi} (\frac{11}{2} - \frac{9}{2}\cos 2\theta) d\theta \\
& \qquad = 44\pi
\end{aligned} \tag{4}
$$

（2）

$$
\begin{aligned}
& 0 \le \theta \le \pi, 0 \le y \le 4 \\
& \int_{S_{cyl}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}_{cyl} = \int_{S_{cyl}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS_{cyl} \\
& \qquad = \int_0^4 \int_0^{\pi} (\frac{11}{2} - \frac{9}{2}\cos 2\theta) d\theta dy \\
& \qquad = 22\pi \\
& \\
& \boldsymbol{n}_{rect} = \langle 0, 0, -1 \rangle \\
& \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_{rect} = -10z = 0 \\
& \int_{S_{rect}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}_{rect} = \int_{S_{rect}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_{rect} dS_{rect} = 0 \\
& \\
& \int_{S_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S_2} = \int_{S_{cyl}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}_{cyl} + \int_{S_{rect}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}_{rect} = 22\pi
\end{aligned} \tag{5}
$$

（3）

$$
\begin{aligned}
& \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial z}(10z) = 1 + 2 + 10 = 13 \\
& \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{4-r} 13 r dz dr d\theta = \frac{130}{3}\pi
\end{aligned} \tag{6}
$$

令和三年

直交座標系において，x，y，z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ とする．次の各問に答えよ．

(1) 3 点 (2, −6, 2), (1, −10, −1) および (−1, 2, 3) が決定する平面と点 (2, −2, −2) との距離を求めよ．

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{F} = \left(-\dfrac{xy}{4}\right)\boldsymbol{i} + (z-x)\,\boldsymbol{j} + (x+y)\,\boldsymbol{k}$ とする．曲線 C: $x = \dfrac{y^2}{8}$, $y = -z$ に沿って, (0, 0, 0) から $\left(\dfrac{9}{2}, 6, -6\right)$ までの線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \times d\boldsymbol{r}$ を計算せよ．

解答

（1）

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{v}_1 = \langle -1, -4, -3 \rangle \quad \boldsymbol{v}_2 = \langle -3, 8, 1 \rangle \\
\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \langle 20, 10, -20 \rangle \\
\boldsymbol{n} = \langle 2, 1, -2 \rangle \\
2x + y - 2z + d = 0 \\
(2, -6, 2)\text{を代入して}, d = 6 \\
2x + y - 2z + 6 = 0 \\
D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 4
\end{gathered} \tag{7}$$

（2）

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{F} = \langle -\frac{y^3}{32}, -y - \frac{y^2}{8}, y + \frac{y^2}{8} \rangle \\
\boldsymbol{r} = \frac{y^2}{8}\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{k} \quad (0 \leq y \leq 6) \\
d\boldsymbol{r} = \langle \frac{y}{4}, 1, -1 \rangle dy \\
\boldsymbol{F} \times d\boldsymbol{r} = \langle -\frac{y^3}{32}, -y - \frac{y^2}{8}, y + \frac{y^2}{8} \rangle \times \langle \frac{y}{4}, 1, -1 \rangle dy = \langle 0, \frac{y^2}{4}, \frac{y^2}{4} \rangle dy \\
\int_C \boldsymbol{F} \times d\boldsymbol{r} = \int_0^6 \langle 0, \frac{y^2}{4}, \frac{y^2}{4} \rangle dy = \langle 0, 18, 18 \rangle
\end{gathered} \tag{8}$$

令和二年

直交座標系において，x，y，z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ とする．次の各問に答えよ．

(1) 面 $z = x^2 + y^2$ と面 $z = \left(x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ について，次の問いに答えよ．

(a) 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$ が，いずれの面にも含まれることを示せ．

(b) 点 P において，それぞれの面の法線のなす角を求めよ．

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = x^2\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ とする．S を $x^2 + y^2 = 9$，$z = 0$，$z = 4$ で囲まれた円筒の表面とするとき，面積分

$$\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を求めよ (ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の外向き単位法線ベクトル)．

解答

（1）

(a)

$$\begin{aligned} z = & x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ z = & \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{9}$$

(b)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}_1 &= \frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial y} = \langle -2x, -2y, 1\rangle = \langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\rangle \\ \boldsymbol{N}_2 &= \frac{\partial \boldsymbol{r}_2}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}_2}{\partial y} = \langle -2(x - \frac{1}{\sqrt{2}}), -2(y - \frac{1}{\sqrt{2}}), 1\rangle = \langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\rangle \\ \cos\theta &= \frac{\boldsymbol{N}_1 \cdot \boldsymbol{N}_2}{|\boldsymbol{N}_1||\boldsymbol{N}_2|} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{10}$$

（2）

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 2x - 2y + 2z \\ \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^4 2(r\cos\theta - r\sin\theta + z) r dz dr d\theta = 144\pi \end{aligned} \tag{11}$$

令和元年

直交座標系において，x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とする．次の各問に答えよ．

(1) スカラー場 ϕ を $\phi = e^{xz}\sin y + e^{x}\cos y$，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = (2x - z)\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ で定める．点 (1,0,1) における ϕ の勾配の $\boldsymbol{A}$ 方向成分を求めよ．

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{A} = z\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4xy\boldsymbol{k}$ について，次の面 S に対する $\boldsymbol{A}$ の面積分を計算せよ．
$S:\ \ 6x + 3y + z = 3 \qquad (x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$

解答

（1）

$$\begin{gathered}
\operatorname{grad}\phi = (ze^{xz}\sin y + e^{x}\cos y)\boldsymbol{i} + (e^{xz}\cos y - e^{x}\sin y)\boldsymbol{j} + xe^{xz}\sin y\boldsymbol{k} \\
\text{点}(1,0,1)\text{において} \\
\operatorname{grad}\phi = e\boldsymbol{i} + e\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \\
|\boldsymbol{A}| = 3 \\
\text{なので、点}(1,0,1)\text{における中の勾配の}A\text{方向成分は} \\
\operatorname{grad}\phi \cdot \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = -\frac{e}{3} \\
\text{である。}
\end{gathered} \tag{12}$$

（2）

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + (-6x - 3y + 3)\boldsymbol{k} \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} = \boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{k} \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k} \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \\
\\
\boldsymbol{A} = (-6x - 3y + 3)i - 3j + 4xyk \\
\boldsymbol{A} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right) = 4xy - 36x - 18y + 9 \\
\\
0 \leq x \leq 1/2\text{かつ}0 \leq y \leq -2x + 1 \\
\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{-2x+1} dy(4xy - 36x - 18y + 9) = 4\int_0^{\frac{1}{2}} dx\left(2x^3 + 7x^2 - 4x\right) = -\frac{17}{24}
\end{gathered} \tag{13}$$